

# Московская предпрофессиональная олимпиада школьников. Математика. 10 класс. Теоретический тур отборочного этапа, 2023/24

1 ноя 2023 г., 10:00 — 20 ноя 2023 г., 23:59

## № 1, вариант 1

---

5 баллов

В магазине есть апельсиновый, яблочный, персиковый и вишнёвый соки (в любом необходимом количестве). Требуется купить 10 пакетов сока, среди которых должны быть два апельсиновых и один персиковый. Сколько существует способов это сделать? Наборы, отличающиеся только порядком, считаются одинаковыми.

## № 1, вариант 2

---

5 баллов

В магазине есть апельсиновый, яблочный, персиковый и вишнёвый соки (в любом необходимом количестве). Требуется купить 12 пакетов сока, среди которых должны быть четыре апельсиновых и два персиковых. Сколько существует способов это сделать? Наборы, отличающиеся только порядком, считаются одинаковыми.

## № 2, вариант 1

---

5 баллов

Дано 2023 прямых в пространстве. Известно, что каждые две прямые пересекаются и никакие три не пересекаются в одной точке. Через каждую пару прямых провели плоскость. Какое максимальное количество плоскостей могло получиться?

**№ 2, вариант 2**

---

5 баллов

Даны 2024 прямые в пространстве. Известно, что каждые две прямые пересекаются и никакие три не пересекаются в одной точке. Через каждую пару прямых провели плоскость. Какое максимальное количество плоскостей могло получиться?

**№ 3, вариант 1**

---

10 баллов

Дан треугольник с углом  $30^\circ$  и площадью 1. Найдите минимальное значение квадрата стороны треугольника, лежащей напротив угла  $30^\circ$ . В ответ запишите целую часть найденного значения.

**№ 3, вариант 2**

---

10 баллов

Дан треугольник с углом  $60^\circ$  и площадью 2. Найдите минимальное значение квадрата стороны треугольника, лежащей напротив угла  $60^\circ$ . В ответ запишите квадрат найденного значения в формате обыкновенной дроби.

**№ 4, вариант 1**

---

10 баллов

Найдите площадь фигуры  $\Phi$ , которая задана системой неравенств:

$$\begin{cases} \left| \frac{x}{\sqrt{3}} - 1 \right| + |y - 3| \leq 1 \\ x^2 + y^2 - 2y \geq 3 \end{cases}$$

В ответ запишите ближайшее целое число.

**№ 4, вариант 2**

---

10 баллов

Найдите площадь фигуры  $\Phi$ , которая задана системой неравенств:

$$\begin{cases} |1-x| + \left|1 - \frac{y}{\sqrt{3}}\right| \leq 1 \\ x^2 + 2x + y^2 \geq 3 \end{cases}$$

В ответ запишите ближайшее целое число.

**№ 5, вариант 1**

---

35 баллов

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (x-y)^2 = xz + yz \\ 4xy - 1 = 4z \\ x^2 + 2xy + y^2 - z = 1 \end{cases}$$

Для каждой тройки решений найдите сумму  $x$ ,  $y$  и  $z$ . В ответ запишите наименьшее из получившихся значений.**№ 5, вариант 2**

---

35 баллов

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (y-z)^2 = xz + xy \\ 4yz = 4x + 1 \\ z^2 + 2yz + y^2 = x + 1 \end{cases}$$

Для каждой тройки решений найдите сумму  $x$ ,  $y$  и  $z$ . В ответ запишите наибольшее из получившихся значений.

**№ 6, вариант 1**

---

35 баллов

Сколько существует целых значений параметра  $a$ , при которых уравнение

$$(1-x)^5 - (1+x)^9 + \sqrt[3]{1-x} = 1 - \sqrt{4-a^2}$$

имеет единственное решение?

**№ 6, вариант 2**

---

35 баллов

Сколько существует целых значений параметра  $a$ , при которых уравнение

$$(1+x)^5 - (1-x)^5 + \sqrt[3]{1+x} = 2 - \sqrt{9-a^2}$$

имеет единственное решение?